2025 合同教研全道集会
第４分科会・数学教育分科会のまとめ

真鍋和弘（共同研究者）

０．はじめに

数学教育分科会は昨年と同様に、市立札幌大通高校を会場に現地とオンラインとのハイブリッド形式で行われた。今回は午前と午後のゆったりとした日程で行われたため議論を深めることができた。参加者は全部で 10 名、幼児教育、小学校、中学校、高校、教員志望の会社員など多岐にわたっていた。報告されたレポートは発表順に次の４本である。

１．excel を使おう（遠藤公彦）
２．線積分による面積公式（真鍋和弘）
３．バカロレア 2025 年数学問題を見る（渡邊勝）
４．万有引力から楕円軌道の導出（成田收）

また補足資料として、「水温と時間の関係は、ほんとうに一次関数なのか」（真鍋）、「グリーンの定理の証明について」（成田）が配られた。以下、レポートの内容をかんたんに紹介する。なお共同研究者の成田收さんによる『道数協通信こんぱす』(NO.327)の報告をかなり参考にさせていただいたことに感謝いたします。

１．excel を使おう　遠藤公彦

小学校教員の遠藤さんはＩＣＴに造詣が深く、たし算などが不得意な子どもたちに excel の機能を使わせる授業について報告した。３角形の内角の和が 180°となることから発展させて、一般の多角形の内角の和がどうなるのかを子どもたちに推測させる授業を行った。そのときの授業の報告である。

小学校の教科書では３角形の内角の和が 180°になることの証明はなく、感覚的に納得することになっている。紙で三角形を作って、角の部分を切って台紙に貼り合わせるとほぼ一直線になることから、子どもは内角の和は 180°であると確信するそうである。その後、excel のワークシートを使って、種々の３角形の角度をシートに記入して和を求めたり、最後は自分で勝手に書いた３角形の角を分度器で測って、やはり和が 180°になることを確認したそうである。とにかく早く進ませることが現代の主流の教育になっていることを考えても、このような丁寧な授業がいま求められていると思う。

さらに、４角形, ５角形, …, 100 角形の内角の和も excel で計算した。４角形は２つの３角形に分けて考えると、180°×２＝360°になる。５角形は 180°×３＝540°となり、100

角形では 17640° となる。一般のｎ角形だと 180° ×（ｎ－２）である。これはｎ角形を分割すると（ｎ－２）個の３角形に分割されることから分かる。これは手計算ではなかなか大変であるが excel シートを使えば自動的に計算される。これなら計算が苦手な子どもでも、コンピュータの力を借りることで簡単に壁を乗り越えられる。ICT もこんな使いかたなら役に立つのかもしれない。現代のタブレットを使うことが目的になってしまった日本の ICT 教育とは、また一味違ったこの授業は子どもを見つめる視線に愛情を感じる実践である。

議論の中で、たとえ小学生であっても３角形の内角の和が 180° になることは、平行線の公理から数学的にきちんと証明でき、納得することは大切であるという指摘があった。小学生だからといって、数学的真実に触れなくてもよいとは思われない。

２． 線積分による面積公式　　真鍋和弘

大定理であるグリーンの定理をより身近なものと感じてもらうために、この定理から任意の図形の面積が計算できることを紹介した。グリーンの定理とは、1828 年にイギリスの数理物理学者グリーンによって、電磁気学に関する論文の中で証明された等式である。２次元実空間R^2内の領域Ｓで定義された微分可能な関数$p(\chi, y)$, $q(\chi, y)$について次の等式が成立する。

$$\int_{\gamma} (p\,d\chi + q\,dy) = \int_{S} (-\partial p/\partial y + \partial q/\partial \chi)\, d\chi\, dy$$

ここでγは領域Ｓの境界である。左辺はＳを左に見ながら一周する線積分であり、右辺は重積分である。グリーンの定理はＳに穴が空いていても成立する（ただし穴の周りの線積分は右回りとする）。

上の式で$p(\chi, y) = -y$, $q(\chi, y) = \chi$とおくと、

$$\int_{\gamma} (-y\,d\chi + \chi\,dy) = \int_{S} 2\,d\chi\,dy = 2 \times \text{Sの面積} \tag{1}$$

となる。簡単な考察で、$\int_{\gamma} (-y)\,d\chi = \int_{\gamma} \chi\,dy$ となることが分かり、次の公式を得る。

$$\int_{\gamma} (-y)\,d\chi = \int_{\gamma} \chi\,dy = \text{Sの面積} \tag{2}$$

これを使って長方形や３角形などの図形の面積を計算してみると、確かに小学校で習った次の公式がでてくる。

長方形の面積＝たての長さ×よこの長さ

３角形の面積＝底辺の長さ×高さ÷２

辺の長さが有理数の場合だと、上の公式の正しさを証明することができる。しかし長さが無理数を含む実数だとどうなるか？　中学校以下の知識では証明することができない。高校

で微積分を習うが、始めから実数が定義されているので、積分で上の公式を導き出しても何の感動も生まれない。また(2)から

$$S\text{の面積}=1/2\cdot\int_{\gamma}(-y\,d\chi+\chi\,dy)$$

を得る。γ を半径aの円周とすると、$0\leqq\theta<2\pi$ として極座標(r,θ)に変換すると

$$r=a,\quad \chi=a\cos\theta,\quad y=a\sin\theta,$$
$$d\chi=-a\sin\theta\,d\theta,\quad dy=a\cos\theta\,d\theta$$

となる。したがって

$$\text{半径1の円の面積}=1/2\cdot\int_{0\to 2\pi} a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$=1/2\cdot 2\pi a^2=\pi a^2$$

がでる。

ニュートンやライプニッツが微積分を創った当時はまだ実数や関数の概念はなかった。近年の数学史の研究によると歴史的には、微積分の概念→関数の概念→実数の概念という順序で数学が発展してきたのである。長く高校生に微積分を教えてきたが、微積分の思想に触れようとしない日本の数学教育にはこの点が欠落しているように思う。

３.バカロレア 2025 年数学問題を見る　　渡邊勝

昨年に引き続きフランスの国立大学入試「バカロレア」の問題の紹介と分析である。今回の数学の問題は前回よりも難しかったそうである。2025 年度も全部で４問が出題された。

第１問　確率統計の問題
第２問　解析の問題
第３問　空間ベクトルの問題
第４問　微分方程式の問題

それぞれの問題の意図と背景について以下のように紹介されている。

［１］フランス人のＡＢＯ血液型とＲｈ因子の分布に関する問題

フランス伝統の数理科学的な問題である。Ａ, Ｂ, ＡＢ型それぞれの人数分布とその中のＲｈ因子が陽性である比率、および全体の中のＲｈ因子陽性の確率を与え、このときの樹形図を完成させる。またＯ型でＲｈ因子陰性のものを万能献血者というが、全体の中から１人を選んだとき、その人が万能献血者である確率を問う問題。

次に 100 人の標本をとったときそのうち X 人が万能献血者であるとすると、確率$P(X)$が二項分布に従うことを示させ、$P(X\geqq 7)$を求めさせ、期待値$E(X)$を求める問題。さらにＮ箇所の都市でそれぞれ 100 人の標本を抽出し、その中の万能献血者の人数をX_iとするとき、$X_1,\cdots,X_N$の平均値M_N, 分散値$V(M_N)$を議論させるなど、平均値、分散の公式を扱

えるかを問うている。さらに昨年の問題に登場したチェビシェフの不等式についての問題も含まれている。

［２］　解析分野からの問題

関数 $f(\chi)=\chi(2(\ell_n\chi)^2-3\ell_n\chi+2)$　　　ただし $\ell_n\chi$ は自然対数

についての考察である。微分係数と接線の傾き、導関数の算出法、自然対数を変数とする合成関数を扱わせている。曲線の凹凸と２次導関数の関係、変曲点の問題。最後は $\chi=e$ における曲線 $y=f(\chi)$ の接線, 曲線 $y=f(\chi)$, 直線 $\chi=1$ と $\chi=e$ で囲まれる部分の面積を求める問題。部分積分を含め、微積分の能力が問われる問題である。

［３］　空間図形を３次元ベクトルを使って考察する問題

① 直線の方程式、方向ベクトルを使って解く問題。
　 平面の法線ベクトルを使って解く問題。
② 与えられた２直線が同一平面上にないことを示す問題。
③ 点と直線の距離を求めさせる問題。

いずれも、３次元ベクトルの扱いに慣れていないと難しい。

［４］　第１問と同様の数理科学的な問題

海底の海藻が成長していく現象を２つの数理モデルによって解析していく問題。

（Ａ部）離散モデルについての考察

n 年後の繁茂面積を u_n とすると漸化式：

$$u_{n+1}=-0.02u_n^2+1.3u_n$$

が成立する。このとき、不等式 $1\leqq u_n\leqq u_{n+1}\leqq 20$ が成立することを示す。数学的帰納法を用いる。数列 u_n の極限値 L が存在し、$L=15$ となることを導く問題。

（Ｂ部）　連続モデルについての考察

t 年後の繁茂面積が関数 $y=f(t)$ の微分方程式：

$$y'=0.02y(15-y)$$

を満たすとき、この微分方程式を誘導により解かせる問題。$g(t)=1/f(t)$ とおくと $y=g(t)$ についての微分方程式が

$$y'=0.3y+0.02$$

を満たすことを誘導し、$g(t)$ から $f(t)$ を求めさせる。

Ａ部とＢ部はどちらも数学を使うことで生物の現象をうまく説明できることを受験生に納得させる内容になっている。これに比べると、日本の共通テストの問題がいかに現実から乖離しているかがわかる。

フランスのバカロレア試験では、この４問を解くために４時間の猶予を与えている。また解答は完全記述式で、日本の共通テスト（マークシート方式）と対照的である。計算機使用を

認めており、数理科学的問題が必ず入っている。問題がおおらかで「奇問・難問」がないという特徴がある。日本の高校−大学接続問題においても参考になる点が多い。

４．万有引力から楕円軌道の導出　　成田收

ニュートンによって万有引力が発見された。ケプラーが発見した「惑星は太陽を焦点として楕円軌道を動く」ことをもとに、彼は万有引力を導き出した。これをニュートンの順問題という。彼の有名な著書『プリンキピア』にその考えが詳細に記述されている。ニュートンの夢は、物体に働く力が分かれば物体がどのように運動するかがわかることだった。太陽からの引力によって惑星は円錐曲線軌道を描くことを示すことをニュートンの逆問題という。

しかし最近の科学史研究から、ニュートンは逆問題の解決に成功しなかったことがわかってきた。これを最終的に成し遂げたのは、対岸のヨーロッパ大陸で発展した無限小の学問、微積分の力によるものだった。したがって、微積分の学習において「万有引力から楕円軌道の導出」を扱うことは、子どもたちに微積分を学ぶことの必然性を伝えることになる。またこれは文化史的にも重要なキーポイントとなる。

現代において数学の立場から力学をみるとき、コーシー流の微分・積分による解析が普通である。これに対し、ライプニッツの系譜である無限小の学問としてのベルヌーイ、オイラー流の微分・積分とではかなりその様相が異なる。コーシー流では直感が働きづらく、代数的で数式の中に力学が埋もれがちである。

[ニュートンによる楕円軌道の導出]

これに関しては、プリンキピアの命題 39、40、41 が対応している。

命題 39　中心力を受ける物体の速度と、任意の点までの通過時間を求めること。

命題 40　中心力を受ける物体の速度は中心からの距離 r のみの関数となること。

命題 41　中心力を受けて運動する物体の軌道と、任意の点までの通過時間を求めること。

これらについて、無限小による詳しい解説がされている。

[ベルヌーイによる万有引力から楕円軌道の導出]

ベルヌーイは命題 40 をもとに、これが命題 41 と同等なことを微分・積分による代数的な計算で示した。また命題 41 によっては、ニュートンの逆問題は解けていないことを指摘した。自分の方法によれば逆問題は解けるがこれは簡単な道ではないことを宣言した。これらの研究ついて、詳しい解説がされている。

本報告は、ニュートン風の幾何学的方法と、ベルヌーイ風の無限小の学問としての微分・積分による方法を比較し、万有引力から楕円軌道を導出する教材作成に必要な力学的背景をまとめた、たいへん貴重なものである。

５．おわりに

　今回初めて参加された小・中の若い現役教員の方から分科会に対して、次のような感想が寄せられた。

「自分以外は高校・中学の数学の先生で、自分にとっては難しい内容でしたが、自分が担当している子どもたちはこういう数学の問題にチャレンジしていくのだなと思いました」

「小学校における excel を使った多角形の内角の和への接近法に、子どもたちへの愛情を感じました」

　来年度は、本分科会により多くの現役の教員が参加してくれることを期待したい。